Arrow-Debreu经济

第3章

Kenneth Arrow (1921-)

- City College of NY. Columbia, Ph.D.
- 1953, The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing
- General equilibrium theory, etc.
- Stanford and Harvard
- Nobel, 1972: GE and welfare economics
- 4 Nobel students
- One of the most prominent economic theorists of 20th century

Gérard Debreu (1921-2004)

- French born American
- 1959, Theory of Value: one of the most important works in mathematical economics
- UC Berkeley
- Nobel, 1983: incorporate new analytical methods into economic theory and reformulate GE

3.1 Arrow-Debreu证券市场

- 定义3.1 ω态索取权state-ω contingent claim：状态为ω时支付1，其它状态支付0的证券

- Arrow-Debreu证券：state-contingent security
- Arrow-Debreu证券市场：由所有的AD证券，即它们的完全集合所构成的证券市场

（状态ω或有要求权）

Arrow-Debreu证券市场

- 在AD市场上，证券的种数等于可能的状态数，即$N=\Omega$。对应的支付矩阵，也即市场结构，是一个单位矩阵：

$$X^{A-D}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=I$$

3.2 状态价格

状态价格state price

- ω态索取权在0期的价格（以0期的消费品为单位）：

$$\phi_\omega$$

- 状态价格的完全集合已知
- 状态价格向量：

$$\phi \equiv [\phi_1; \cdots; \phi_\omega; \cdots \phi_\Omega]$$

- 状态价格严格为正，否则意味着套利机会

3.3 市场的完备性

- 定义3.2 如果市场中的任一有限消费计划都可以通过有限成本的可交易证券的组合来融资，那么这个证券市场是完备的
- AD市场是完备的：

任意消费计划： $x=[c_{11};\cdots c_{1\Omega}]$

ω态索取权组合： $\theta=[c_{11};\cdots c_{1\Omega}]$

终期收支： $X^{AD}\theta=[c_{11};\cdots c_{1\Omega}]=x$

组合成本： $\phi^{T}\theta$

P36 Ex3.2

- 一种债券：不完备

- 两种AD证券：完备

- 一种债券、一种股票：完备

3.4 参与者的优化

- 假设1期禀赋e_1即0期持有量 θ-bar
- 复制组合replicating portfolio：复制一个给定支付的组合，如 θ-bar
- 金融财富financial wealth：禀赋的总市值

$$\omega = e_0 + \phi^T e_1$$

- 扩展价格向量： Φ-hat

$$\hat{\phi} = [1; \phi]$$

- 预算约束：消费总成本=总财富

$$\hat{\phi}^T (c - e) = 0$$

参与者的优化（续）

- 2.6式优化问题（即3.4）：

$$\max_{c\in C} U(c)$$

$$s.t.$$

$$\hat{\phi}^T(c-e)=0$$

$$c\geq 0$$

参与者的优化（续）

定理3.1 令$C=R_{+}^{1+\Omega}$且$U(\bullet)$在C上连续，优化问题(3.4)有解

证明：消费计划集$B(e,\{I,\phi\})=\{c\geq 0:\hat{\phi}^{T}c=w=\hat{\phi}^{T}c\}$

$\phi_0=1$且$\phi>>0$，ϕ中最小元素ϕ_m严格为正

B中任何计划的任一元素小于$\frac{w}{\phi_m}$，

B有界，且是闭的，故$U(c)$有极大

参与者的优化（续）

- 边际效用marginal utility：对消费的偏导数
- 不满足性Insatiability意味着边际效用为正

$$DU \equiv [\partial_0 U; \partial_1 U; \cdots; \partial_\Omega U]$$
$$DU >> 0$$

参与者的优化（续）

定理 3.2 假定 $DU \gg 0$，那么问题（3.4）的解满足如下条件：

$$\partial_i U = \lambda \phi_i + \mu_i, i = 1, \cdots \Omega$$

$$\phi^T (e - c) = 0 \qquad (3.6)$$

$$\mu_i c_i = 0, i = 0, 1, \cdots, \Omega$$

这里，$\lambda > 0$，以及 $\mu_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, \Omega$，是由（3.6）确定的系数。

- 3.6式给出一阶条件（Kuhn-Tucker）

参与者的优化（续）

例 3.3　考虑"**Lucas** 树经济"，**1** 期有两个概率相等的状态 a 和 b。假设 **1** 期的两个可能的状态价格分别为 ϕ_a 和 ϕ_b。考虑一个参与者，他的禀赋予为 $(e_0; e_{1a}; e_{1b})$。他具有如下对数形式的效用函数：

$$U(c_0, c_{1a}, c_{1b}) = \log c_0 + \frac{1}{2}(\log c_{1a} + \log c_{1b})$$

他的最优消费/组合选择是什么？

$$c_i \to 0, \partial_i U \to \infty: \qquad c_i > 0$$

（最优消费）解在内部，不在边界上：$\mu_i = 0$

参与者的优化（续）

假设存在内部解，一阶条件变为

$$\partial U_k(c_k) = \lambda_k \hat{\phi}$$

λ_k 由预算约束决定。这意味着 $\forall k, \omega \in \Omega$，

$$\partial_0 U_k(c_k) = \lambda_k \phi_0 = \lambda_k$$
$$\partial_\omega U_k(c_k) = \lambda_k \phi_\omega$$

$$\therefore \frac{\partial_\omega U_k(c_k)}{\partial_0 U_k(c_k)} = \frac{\phi_\omega}{\phi_0} = \frac{\phi_\omega}{1} = \phi_\omega$$

$$\partial_0 U_k = \frac{\partial_\omega U_k}{\phi_\omega}$$

参与者的优化（续）

- 达到最优时，对于参与者来说，在不同时期和状态间转移消费是无差异的

3.5 市场均衡

Arrow-Debreu 经济的均衡是使如下条件成立的状态价格集合$\{\phi_\omega, \omega \in \Omega\}$

1．给定状态价格，每一参与者达到最优化：

$$c_k(e_k, \phi) = \operatorname{Arg\,max} U_k(c_k)$$

$s.t.$

$$(1) c_{k,0} + \phi^T c_{k,1} = e_{k,0} + \phi^T e_{k,1}$$

$$(2) c_k \geq 0$$

2．证券市场出清：

$$\sum_k c_{k,0}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,0}$$

$$\sum_k c_{k,1}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,1}$$

市场均衡（续）

- 定理3.3 对于定义2.5给出的、存在AD证券市场的经济来说，均衡总是存在的
- 均衡时，在任何状态下，所有参与者的相对边际效用都相等：3.9式
- P42 若3.9式不成立，…

市场均衡（续）

- P42 Ex3.4

- 存在一无摩擦的AD证券市场，对于所有参与者的相对边际效用都相等来说特别重要：边际效用差异导致交易，而AD证券为这种交易提供了可能！
- 交易成本或AD证券缺损：差异无法消除

市场均衡（续）

- 定理3.4 对于定义2.5给出的、存在AD证券市场的经济来说，均衡达到的资源配置是Pareto最优的
- 第一福利经济学定理First Theorem of Welfare Economics
- 反证：...

3.7 练习

3.2 考虑一个在 1 期只有一个可能状态的经济。（在这种情况下不存在不确定性。）参与者 1 的 0 期禀赋为 100 而 1 期禀赋为 1，即他的禀赋向量为 [100; 1]。他的偏好可以表示成如下形式：

$$U(c_0, c_1) = \log c_0 + \rho \log c_1.$$

有一只可交易证券，它的 0 期价格为 1、1 期支付为 $1 + r_F$。这里，r_F 是利率。

(a) 假设利率 r_F 是给定的，导出参与者对证券的需求。

(b) 假设参与者1是经济中的唯一参与者。描述市场出清条件。

(c) 求解均衡利率。

(d) 均衡利率如何依赖于偏好参数 ρ？解释所得到的结论。